E.N.S.I. CHIMIE CENTRE Option TB 1981

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures

N.B. — *Les questions 4, 5 et 6 sont indépendantes des questions 2 et 3.*

Les candidats pourront utiliser tout résultat donné par l'énoncé et qu'ils n'ont pu établir, en le précisant chaque fois.

Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positif ou nuls. On se propose d'étudier les suites de fonctions réelles $p_n(t)$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}^+$, vérifiant le système différentiel (1) :

$$(1)\quad \begin{cases} p_0'(t) + C_0\, p_0(t) = 0 \\ (\forall\, n \in \mathbb{N}^*) \quad p_n'(t) + C_n\, p_n(t) = C_{n-1}\, p_{n-1}(t) \end{cases}$$

1° *a.* Montrer que les relations (1) sont équivalentes aux relations (2) :

$$(2)\quad \begin{cases} p_0(t) = p_0(0)\, e^{-t C_0} \\ p_n(t) = p_n(0)\, e^{-t C_n} + C_{n-1} \displaystyle\int_0^t e^{-(t-u) C_n}\, p_{n-1}(u)\, du \end{cases}$$

1° *b.* En déduire que si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle quelconque, il existe exactement une suite de fonctions p_n solutions de (1), et telle que

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \qquad p_n(0) = \lambda_n.$$

2° On suppose dans cette question $p_n(0) \geqslant 0$ pour tout n.

2° *a.* En déduire

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})\ (\forall\, t \in \mathbb{R}^+)\ p_n(t) \geqslant 0.$$

2° *b.* On pose

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \qquad s_n(t) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} p_k(t)$$

Montrer que l'on a

$$(3)\qquad s_n(0) - s_n(t) = C_n \int_0^t p_n(u)\, du$$

Conclure quant au sens de variation de $t \to s_n(t)$ sur $\mathbb{R}^+$.

2° *c.* En déduire que si la série numérique de terme général $p_n(0)$ est convergente, il en est de même, pour tout t positif, de la série de terme général $p_n(t)$ et que l'on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n(t) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n(0).$$

On notera dans la suite $s(t) = \lim_{n\to\infty} s_n(t)$.

3° On suppose, dans cette question $C_n > 0$ (pout tout n), et on considère la solution p_n de (1) pour laquelle on a :

$$(4)\qquad p_0(0) = 1 \quad ; \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*) \qquad p_n(0) = 0$$

3° *a.* Montrer que l'on a :

$$(5)\qquad 0 \leqslant \frac{1 - s(t)}{C_n} \leqslant \int_0^t p_n(u)\, du$$

En déduire, $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ $(\forall\, t \in \mathbb{R}^+)$:

$$(6)\qquad [1 - s(t)] \left[\frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_1} + \ldots + \frac{1}{C_n}\right] \leqslant t.$$

3° *b.* Montrer que si la série numérique de terme général $\dfrac{1}{C_n}$ diverge, alors :

$$(\forall\, t \in \mathbb{R}^+)\ s(t) = 1.$$

.../...

3° *c.* Montrer que l'on a, $(\forall\, n \in \mathbb{N})\ (\forall\, t \in \mathbb{R}^+)$:

$$(7) \qquad t.s_n(t) \leqslant \int_0^t s_n(u)\,du \leqslant \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_1} + \ldots + \frac{1}{C_n}$$

En déduire, réciproquement, que si, $(\forall\, t \in \mathbb{R}^+)$, $s(t) = 1$, alors la série de terme général $\frac{1}{C_n}$ diverge.

4° On suppose les C_n deux à deux distincts, et on définit les réels $a_{k,n}$ $(0 \leqslant k \leqslant n;\ n \in \mathbb{N})$ par la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{(x - C_0)\ (x - C_1)\ \ldots\ (x - C_n)} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{a_{k,n}}{x - C_k}$$

4° *a.* Établir les relations :

$$(8) \qquad \begin{cases} (0 \leqslant k \leqslant n) \quad (C_k - C_{n+1})\ a_{k,n+1} = a_{k,n} \\ \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n+1} a_{k,n+1} = 0 \end{cases}$$

4° *b.* Montrer, sans utiliser ces formules qu'on a : $a_{00} = 1$ et

$$(9) \qquad a_{k,n} = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}} (C_k - C_j)^{-1}$$

5° Les hypothèses sur les C_n restant celles de la question précédente, montrer que la solution du système (1) vérifiant les conditions (4) est donnée par les formules :

$$p_0(t) = e^{-t C_0}$$

$$(10) \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)\ \ p_n(t) = (-1)^n\, C_0 . C_1 \ldots C_{n-1} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_{k,n}\, e^{-t C_k}$$

6° On suppose ici $C_n = n + r$ $(r \in \mathbb{R}^{+*})$.

6° *a.* Montrer que les fonctions définies par (10) sont données par

$$p_0(t) = e^{-rt} \quad ; \quad p_n(t) = \frac{r(r+1)\ \ldots\ (r+n-1)}{n!} \cdot e^{-rt} . (1 - e^{-t})^n$$

6° *b.* En utilisant ce seul dernier résultat, montrer que la série de terme général $p_n(t)$ converge pour tout t positif et que l'on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n(t) = 1.$$

1 — 8 — 1

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail